

LABORATOR NR. 2: CALCULUL RĂSPUNSULUI UNUI SISTEM CONTINUU LINEAR INVARIANT

Obiectivele lucrării

- a) studiul calculului răspunsului unui sistem continuu linear invariant;
- b) studiul regimului tranzitoriu și a regimului permanent;
- c) implementarea notiunilor prezentate în aplicații Matlab.

Calculul răspunsului unui sistem continuu linear invariant

Calculul analitic. Ecuația caracteristică

Ne interesează expresia analitică a răspunsului unui SLCI care reprezintă soluția ecuației sale diferențiale de transfer pentru o stare inițială precisă. Soluția generală $y_g(t)$ a acestei ecuații poate fi descompusă în două soluții parțiale:

- 1) soluția generală $y_\lambda(t)$ a ecuației diferențiale fără membrul drept (ecuația omogenă);
- 2) o soluție particulară $y_p(t)$ a ecuației diferențiale complete.

Cele n constante de integrare a funcției $y_\lambda(t)$ sunt determinate astfel încât soluția globală

$$y_g(t) = y_p(t) + y_\lambda(t)$$

satisfacă cele n condiții inițiale.

Cum soluția generală $y_\lambda(t)$ este independentă de excitația $u(t)$, forma sa se obține rezolvând *ecuația caracteristică* asociată ecuației diferențiale de transfer:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0. \quad (1)$$

Am obținut o ecuație polinomială care are n rădăcini r_k $k=1, \dots, n$ reale sau complexe (conjugate două câte două), distincte sau nu:

Când rădăcinile sunt distincte, se obține:

$$y_\lambda(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} + \dots + \lambda_n e^{r_n t},$$
$$\lambda_k \in C; \quad k = 1, \dots, n.$$

Dacă rădăcinile nu sunt toate distincte, soluția $y_\lambda(t)$ este suma celor n termeni obținuți după cum urmează:

- fiecare rădăcină simplă r_j generează un termen:

$$\lambda_j e^{r_j t}; \quad \lambda_j \in C.$$

- fiecare rădăcină dublă r_k generează doi termeni:

$$\lambda_k e^{r_k t} + \mu_k t e^{r_k t}; \quad \lambda_k, \mu_k \in C.$$

- fiecare rădăcină triplă generează trei termeni:

$$\lambda_h e^{r_h t} + \mu_h t e^{r_h t} + \nu_h t^2 e^{r_h t}; \quad \lambda_h, \mu_h, \nu_h \in C.$$

etc.

Remarca 1. : Răspunsul liber $y_l(t)$ se obține din soluția generală $y_\lambda(t)$, determinând valorile λ_k care satisfac condițiile inițiale $x(t_0)$.

Exemplul 1. : Fie un SLCI a cărui ecuație diferențială de transfer este:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} + 10y(t) = 2u(t)$$

starea inițială fiind definită prin:

$$y(0) = 1.2 \text{ și } y'(0) = 1.$$

Dorim să obținem răspunsul sistemului la o treaptă unitară:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ 1, & \forall t \geq 0 \end{cases}.$$

Ecuația caracteristică asociată ecuației diferențiale este:

$$r^2 + 7r + 10 = 0,$$

având ca rădăcini $r_1 = -2$ și $r_2 = -5$

Soluția generală a ecuației omogene (fără membrul drept) este:

$$y_\lambda(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-5t} \quad (2)$$

Deoarece o soluție particulară este furnizată de:

$$y_p(t) = 0.2,$$

soluția generală se scrie sub forma:

$$y_g(t) = 0.2 + \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-5t} \quad (3)$$

Pentru a satisface starea inițială, trebuie să alegem $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = -1$, de unde rezultă că:

$$y(t) = 0.2 + 2e^{-2t} - e^{-5t}$$

Expresia (2) ne permite să calculăm răspunsul liber al sistemului care trebuie să satisfacă aceleași condiții inițiale. Avem:

$$\lambda_1 = \frac{7}{3}; \lambda_2 = -\frac{17}{15};$$

și deci răspunsul liber are expresia:

$$y_l(t) = \frac{7}{3}e^{-2t} - \frac{17}{15}e^{-5t}$$

Pentru a calcula contribuția regimului forțat la regimul relaxat, aplicăm formula (3), dar în condiții inițiale nule:

$$y_f(0) = 0; y_f'(0) = 0.$$

Obținem constantele

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}; \lambda_2 = -\frac{2}{15}$$

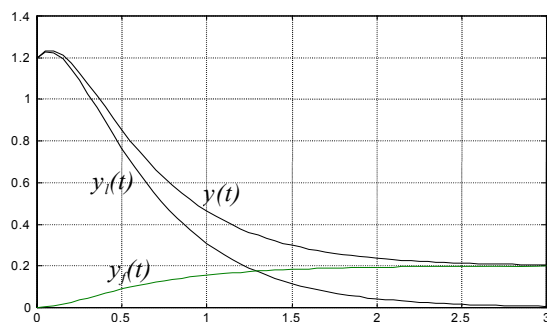
și astfel:

$$y_f(t) = 0.2 - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t}$$

Putem verifica principiul superpoziției regimului liber și a regimului forțat:

$$y_l(t) + y_f(t) = y(t)$$

În continuare se prezintă pe același grafic curbele $y_l(t)$, $y_f(t)$ și $y(t)$.



Regim permanent și regim tranzitoriu

Deseori, pentru analiza unui sistem, considerăm ca semnale de intrare semnale canonice, cum ar fi treapta unitară sau semnalul sinusoidal. Dacă sistemul considerat este asimptotic stabil în anumite condiții date, constatăm că răspunsul corespunde, după un interval de timp îndelungat, unui semnal canonic, uneori de același tip ca a celui de intrare. În acest caz, considerăm că sistemul se află în *regim permanent*, căruia îi corespunde *răspunsul permanent* $y_{pm}(t)$.

Astfel, soluția $y(t)$ mai poate fi descompusă într-o altă formă:

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{pm}(t),$$

$y_{tr}(t)$ fiind *răspunsul tranzitoriu* al sistemului care are următoarea proprietate:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0.$$

Subînțelegem existența, în evoluția sistemului, a unui *regim tranzitoriu* de durată "finită", care, o dată terminat, lasă loc *regimului permanent*. În practică, considerăm că *regimul tranzitoriu* se termină după un timp "suficient" de lung pentru a putea fi neglijat.

Dacă reluăm sistemul considerat în exemplul 1 cu aceeași stare inițială, și cu răspunsul la treaptă unitară:

$$y(t) = 0.2 + 2e^{-2t} - e^{-5t},$$

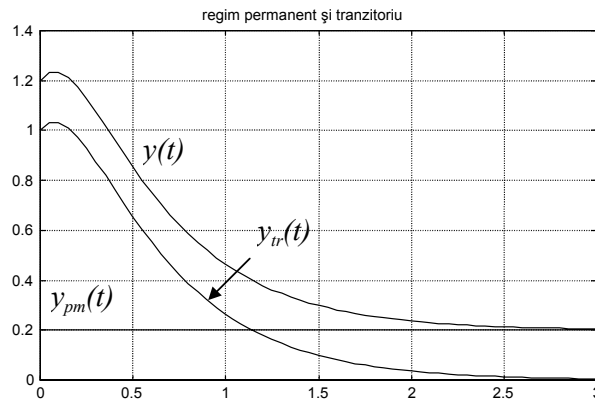
vom constata că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.2$$

Putem deci considera următoarea descompunere a răspunsului sistemului:

$$y_{pm}(t) = 0.2$$

$$y_{tr}(t) = 2e^{-2t} - e^{-5t}$$



Deși există o anumită dificultate matematică în definirea regimurilor *tranzitoriu* și *permanent*, cele două concepte sunt foarte importante în automatică.

Dacă sistemul este asimptotic stabil, atunci există un regim permanent constant caracterizat prin punctul de echilibru $E(\bar{u}, \bar{y})$, pentru care ecuația diferențială a unui sistem se reduce la o simplă relație de proporționalitate între $\bar{y}$ și $\bar{u}$:

$$\bar{y} = K \bar{u}$$

unde coeficientul K definit prin:

$$K = \frac{b_o}{a_o}$$

poartă numele de *amplificare în regim staționar* a sistemului.

Cerinte

Studiul notiunilor teoretice prezentate în lucrare. Calculul răspunsului sistemului continuu linear invariant.

Scrierea programelor Matlab pentru determinarea răspunsului liber și a celui forțat și a programelor Matlab ce pun în evidență regimul tranzitoriu și regimul permanent.