

LABORATOR NR. 3: STUDIUL SISTEMELOR DINAMICE ELEMENTARE

Obiectivul lucrării

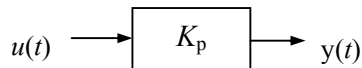
a) studiul în domeniul timp a sistemelor dinamice elementare.

Elemente dinamice elementare

În aceasta lucrare de laborator, se studiază elementele dinamice cele mai simple care, în unele situații, nu sunt realizabile fizic în mod unitar, dar intervin în compunerea altor sisteme dinamice.

Ecuția intrare-ieșire, funcția de transfer și răspunsul temporal la diferite semnale de probă vor fi determinate pentru fiecare element.

Elementul proporțional ideal



Ecuția intrare-ieșire:

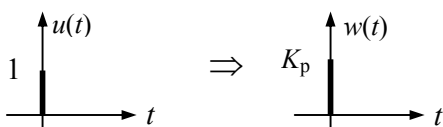
$$y(t) = K_p \cdot u(t)$$

Este vorba de un amplificator ideal (fără întârziere) cu amplificarea K_p numit și *factor de proporționalitate*.

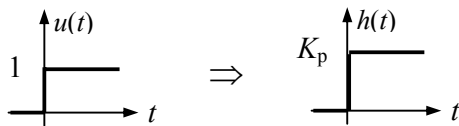
Funcția de transfer:

$$W(s) = K_p \quad (1)$$

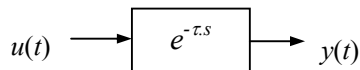
Răspunsul la impuls :



Răspunsul indicial:



Elementul cu timp mort(întârziere pura)



Ecuția intrare-ieșire:

$$y(t)=u(t-\tau)$$

Ieșirea reproduce intrarea cu o întârziere de τ unități de timp. Valoarea τ caracterizează elementul cu timp mort.

Funcția de transfer:

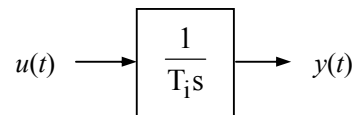
$$W(s)=e^{-\tau.s} \quad (2)$$

Răspunsul indicial:



Elementul integrator

Ieșirea sa se obține prin integrarea în fiecare moment a intrării



Ecuția intrare-ieșire:

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{T_i} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

T_i se numește *constantă de timp de integrare*. Aceasta se măsoară în unități de timp. Integratorul poate fi deasemenea caracterizat prin *coeficientul de viteză* K_v

$$K_v = \frac{1}{T_i} [s^{-1}]$$

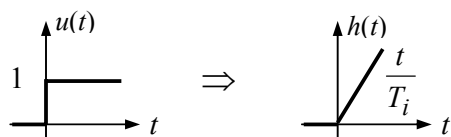
Funcția de transfer:

$$W(s) = \frac{1}{T_i s} \quad (3)$$

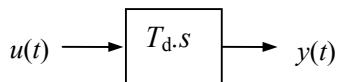
Răspunsul la impuls :



Răspunsul indicial:



Elementul derivator ideal



Ecuția intrare-ieșire:

$$y(t) = T_d \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Acest element realizează derivarea în timp a semnalului de intrare. El este caracterizat de constanta de timp de derivare T_d [s].

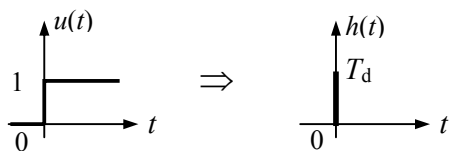
Funcția de transfer:

$$W(s) = T_d \cdot s \quad (4)$$

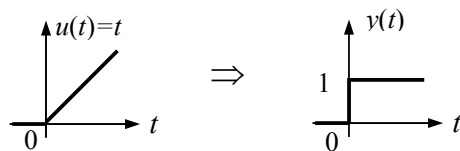
Acesta este un element dinamic care nu este realizabil fizic, deoarece gradul numărătorului funcției de transfer este superior gradului numitorului. Există sisteme reale care realizează o aproximare a derivatei semnalului de intrare; se utilizează de obicei sistemul la limită causal definit prin funcția de transfer

$$W(s) = \frac{T_d \cdot s}{1 + T \cdot s} \quad (\text{vezi paragraful următor})$$

Răspunsul indicial:

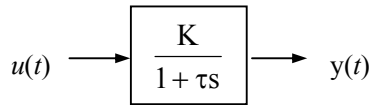


Răspunsul la rampă unitară:



Sistemul de ordin unu

Acesta este un sistem a cărui funcție de transfer conține un numitor de grad unu în s și un numărător constant.



Notăm cu $W_1(s)$ funcția sa de transfer

$$W_1(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s}. \quad (5)$$

Acest sistem dinamic este caracterizat prin doi parametri :

- τ : constanta de timp

- K : factorul de amplificare în regim staționar al sistemului.

Ecuția intrare-ieșire:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)$$

Modelul intrare-ieșire este o ecuație diferențială de ordinul unu.

Răspunsul la impuls (funcția pondere):

$$W_1(s) = \frac{K}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \Rightarrow w_1(t) = L^{-1}(W_1(s)) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

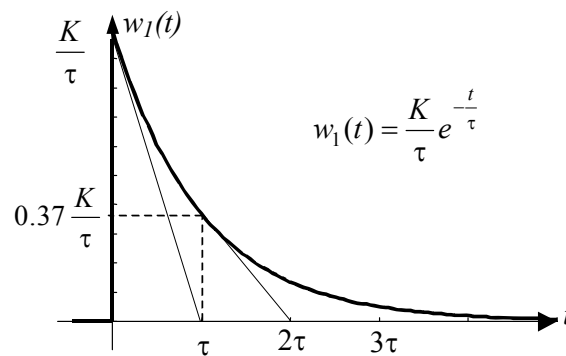


Fig. 1 Răspunsul la impuls al sistemului de ordin unu

Se poate remarca că tangenta la $e^{-\frac{t}{\tau}}$ în origine este constantă și egală cu constanta de timp τ .

Răspunsul indicial:

$$H_1(s) = W_1(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K/\tau}{s(1/\tau + s)} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1/\tau + s} \right);$$

Deci:

$$h_1(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

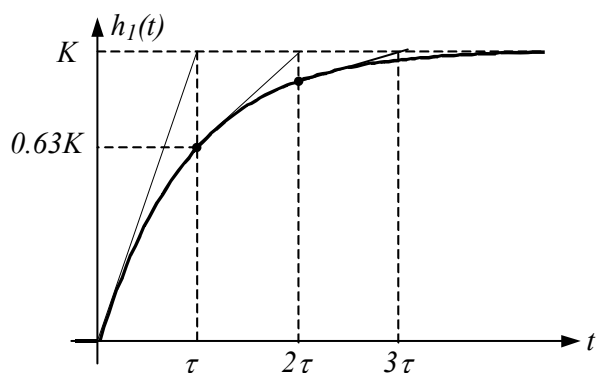


Fig. 2 Răspunsul indicial al sistemului de ordin unu

Răspunsul la rampă unitară : $u(t)=t \cdot \gamma(t)$

$$Y(s) = W_1(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = K \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

Ieșirea sistemului este originalul acestei expresii, adică:

$$y(t) = K \left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Figura 3 arată că sistemul reproduce intrarea în regim permanent cu o întârziere de τ unități de timp.

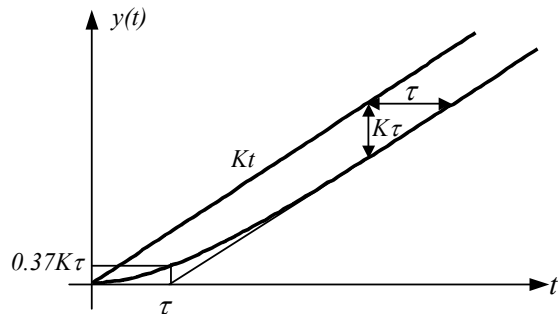
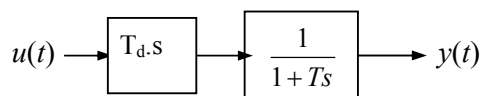


Fig. 3 Răspunsul sistemului de ordin unu la rampă unitară

Elementul derivator cauzal

Un sistem de ordin unu, definit prin $1/(1+Ts)$, înseriat cu un derivator ideal, cu funcția de transfer $T_d \cdot s$, formează împreună un sistem care realizează, în mod aproximativ, derivarea semnalului de intrare, dacă constantele de timp T și T_d verifică condiția:

$$T_d \gg T$$



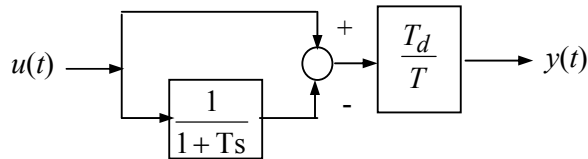
Funcția de transfer:

$$W(s) = \frac{T_d \cdot s}{1 + T \cdot s}$$

Ecuția intrare-ieșire:

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = T_d \frac{du}{dt}$$

Se poate analiza, de exemplu, răspunsul indicial, utilizând structura sugerată prin schema funcțională următoare

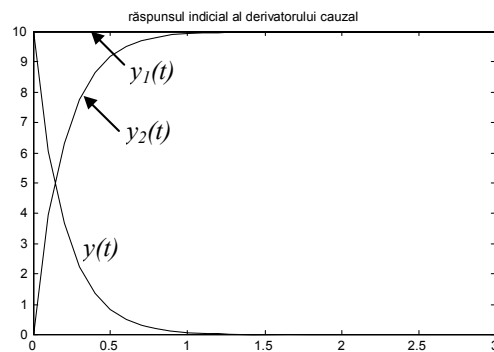


Așadar, se poate scrie funcția de transfer sub forma

$$W(s) = \frac{T_d}{T} \left(1 - \frac{1}{Ts+1} \right) = \frac{T_d}{T} - \frac{T_d/T}{Ts+1} = W_1(s) - W_2(s),$$

unde $W_1(s)$ este un element proporțional ideal și $W_2(s)$ este de ordinul unu.

Calculând $y_1(t)$ și $y_2(t)$ corespunzător celor două funcții de transfer și considerând ieșirea $y(t)$ ca suprapunerea semnalelor $y_1(t)$ și $-y_2(t)$, se obține grafic, ca în figura de mai jos, răspunsul indicial al derivatorului cauzal.



Sistemul de ordin doi

Este un sistem a cărui funcție de transfer are un numitor de gradul doi în s și un numărător constant.

$$W_2(s) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2} \quad (6)$$

El este determinat prin trei parametrii:

- K : factorul de amplificarea în regim staționar
- ζ : factorul de amortizare
- ω_n : pulsația naturală

Discriminantul ecuației caracteristice

$$\Delta' = (\zeta^2 - 1)\omega_n^2$$

ne arată că natura polilor variază potrivit valorii ζ . Se consideră cazurile următoare:

a) $\zeta > 1$; polii sunt reali:

$$p_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n$$
$$p_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n$$

Se poate deci considera

$$\frac{1}{\tau_1} = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n$$
$$\frac{1}{\tau_2} = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n$$

Sistemul apare atunci ca rezultatul punerii în cascadă a două sisteme de ordin unu, cu constantele de timp τ_1 și τ_2

$$W_2(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

a căror proprietăți sunt deja cunoscute.

b) $\zeta = 1$, adică există un pol dublu real

$$p = -\zeta \omega_n$$

Se poate considera

$$\frac{1}{\tau} = \zeta \omega_n,$$

și se obține atunci

$$W_2(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^2}$$

În acest caz, sistemul apare ca rezultat al punerii în cascadă a două sisteme de ordinul unu identice.

c) $0 < \zeta < 1$, polii sunt complex conjugati

$$p_1 = \left(-\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2} \right) \omega_n$$
$$p_2 = \left(-\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2} \right) \omega_n$$

Se poate scrie

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p$$

cu

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} : \text{constantă de timp}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} : \text{constantă numită pulsație proprie.}$$

Funcția de transfer poate fi scrisă sub forma:

$$W_2(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_p^2} = \frac{K\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_p^2\right)}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_p^2}. \quad (7)$$

Răspunsul la impuls(funcția pondere)

Consultând tabelul transformatei Laplace din Anexa 3, se deduce răspunsul sistemului la impuls unitar

$$w_2(t) = K \left[\frac{\frac{1}{\tau^2} + \omega_p^2}{\omega_p} \right] \cdot \sin(\omega_p t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8)$$

d) $\zeta=0$ polii sunt pe axa imaginară:

$$p_1 = j\omega_n$$

$$p_2 = -j\omega_n$$

Acesta este cazul limită al cazului precedent cu o constantă de timp τ infinită și o pulsație proprie egală cu pulsația naturală (pulsație proprie neamortizată). Funcția de transfer se scrie atunci:

$$W_2(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}.$$

Răspunsul la impuls:

$$w_2(t) = K \sin \omega_n t$$

Răspunsul indicial:

$$h_2(t) = K(1 - \cos \omega_n t).$$

Cazul care nu se reduce la un sistem de ordinul unu corespunde unui factor de amortizare $0 < \zeta < 1$. Răspunsul său la impuls (8) este reprezentat în figura următoare.

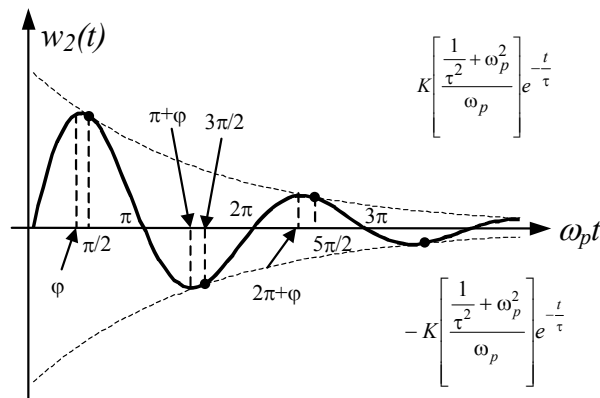


Fig. 4 Răspunsul la impuls al unui sistem de ordin doi

Răspunsul $w_2(t)$ se anulează la momentele de timp definite prin

$$\omega_p t = k\pi.$$

Exponențialele înfășurătoare ale răspunsul sistemului sunt date de expresiile:

$$y(t) = \pm K \left[\frac{\frac{1}{\tau^2} + \omega_p^2}{\omega_p} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Contactul cu exponențialele care mărginesc răspunsul se face la momente de timp definite prin

$$\sin(\omega_p t) = \pm 1; \Rightarrow \omega_p t = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Valorile extreme ale lui $w_2(t)$ sunt atinse la momentele de timp care anulează derivata $\frac{dw_2}{dt}$, adică:

$$\operatorname{tg} \omega_p t = \tau \omega_p \Rightarrow \omega_p t = \operatorname{Arctg} \tau \omega_p + k\pi = \varphi + k\pi,$$

unde unghiul φ este dat de

$$\varphi = \operatorname{Arctg} \omega_p \tau.$$

El rezultă din

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{\omega_n \zeta} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \text{ cu}$$

$$\cos \varphi = \zeta, \text{ , } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Introducerea unghiului φ permite rescrierea răspunsului la impuls sub forma

$$w_2(t) = K \omega_p \cdot \frac{\sin \omega_p t}{\sin^2 \varphi} \cdot e^{-\frac{\omega_p t}{\operatorname{tg} \varphi}} \quad (9)$$

Răspunsul indicial

Figura 5 ilustrează răspunsurile indiciale posibile în funcție de factorul de amortizare ζ . Cazul $\zeta=0$ corespunde unui răspuns oscilant neamortizat. Pentru $0 < \zeta < 0.7$, sistemul prezintă un caracter oscilatoriu amortizat, pe când cazul $0.7 \leq \zeta < 1$ va genera doar suprareglaj. Cazul $\zeta \geq 1$, prezintă un răspuns, așa spus aperiodic, având aceeași aliură ca a unui sistem de ordinul unu.

Se va detalia, în continuare, calculul răspunsului indicial în cazul în care funcția de transfer are doi poli complex conjugați.

$$h_2(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} W_2(s) \right\}$$

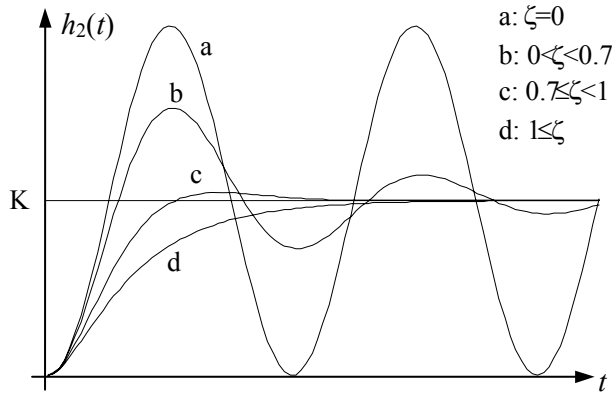


Fig. 5 Răspunsul indicial al unui sistem de ordin doi

El devine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} W_2(s) &= \frac{K \left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_p^2 \right)}{s \left[\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_p^2 \right]} = \\ &= K \left[\frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{\tau}}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_p^2} - \frac{1}{\tau \omega_p} \cdot \frac{\omega_p}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_p^2} \right] \end{aligned}$$

Utilizând transformata Laplace, se obține

$$h_2(t) = K \left[1 - \cos \omega_p t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \sin \omega_p t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \text{ sau încă}$$

$$\boxed{h_2(t) = K \left[1 - \frac{\sin(\omega_p t + \varphi)}{\sin \varphi} \cdot e^{-\frac{\omega_p t}{\operatorname{tg} \varphi}} \right]} \quad (10)$$

Extremele lui $h_2(t)$ corespund zerourilor derivatei sale, adică momentelor pentru care răspunsul la impuls $w_2(t)$ se anulează; ele au deci abscise periodice definite prin

$$\omega_p t = k\pi.$$

Se numește depășire balistică de ordin k este cantitatea fără dimensiune

$$\sigma_{2(k)} = \frac{h_2\left(\frac{k\pi}{\omega_p}\right) - h_2(\infty)}{h_2(\infty)} = - \left[-e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}} \right]^k$$

Rezultă că depășirile depind numai de factorul de amortizare ζ .

Întrucât prima depășire este

$$\sigma_{2(1)} = e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}},$$

se poate exprima cea de-a " k " depășirea sub forma

$$\sigma_{2(k)} = - \left[-\sigma_{2(1)} \right]^k,$$

fiind așadar o progresie geometrică de rație $-\sigma_{2(1)}$.

Figura 6 ilustrează evoluția lui $\frac{h_2(t)}{K}$ pentru $\zeta < 0.7$.

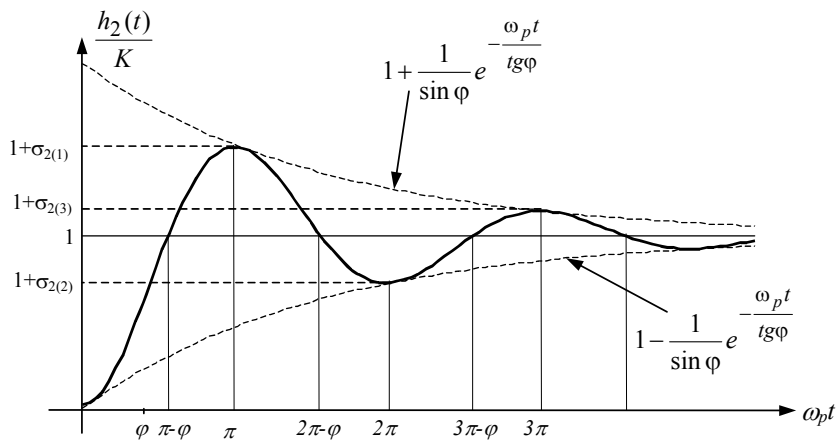


Fig. 6 Răspunsul indicial oscilant amortizat al unui sistem de ordin doi ($0 < \zeta < 0.7$)

Intersecțiile lui $h_2(t)$ cu asimptota sa $h_2(t)=K$ sunt definite prin

$$\sin(\omega_p t + \varphi) = 0.$$

și în consecință

$$\omega_p t = \pi - \varphi + k\pi, \quad k \geq 1$$

Punctele de inflexiune corespund extremelor lui $h_2'(t)=w_2(t)$; ele sunt date de

$$\omega_p t = \varphi + k\pi, \quad k \geq 0$$

Contactele cu *exponențialele-înfășurătoare* ilustrate în figura 6 se fac în punctele definite prin

$$\sin(\omega_p t + \varphi) = \pm 1$$

sau încă

$$\omega_p t = \frac{\pi}{2} - \varphi + k\pi, \quad k \geq 0.$$

Cerinte

Studiul notiunilor teoretice prezentate în lucrare.

Simularea sistemelor dinamice elementare prezentate în lucrare în mediul Matlab. Se vor utiliza instrucțiunile specifice existente în Matlab: *impulse* (pentru răspunsul la impuls) și *step* (pentru răspunsul la treapta unitară).