

LABORATOR NR. 5: ANALIZA STABILITATII SISTEMELOR IN BUCLA INCHISA.

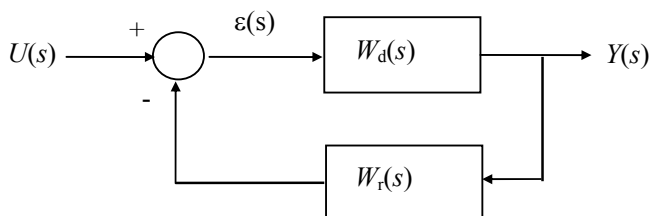
Obiectivele lucrării

- a) studiul stabilității sistemelor în bucla închisă și a gradului de stabilitate;
- b) aplicarea noțiunilor teoretice asupra unor exemple practice.

Analiza stabilității sistemelor în buclă închisă. Criteriul lui Nyquist.

Vom studia o proprietate remarcabilă a locului Nyquist a unui sistem în buclă deschisă care permite analiza stabilității sistemului în buclă închisă.

Funcția de transfer a unui sistem în buclă închisă (cu reacție negativă)



se scrie:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W_d(s)}{1 + W_d(s) \cdot W_r(s)},$$

unde $W_d(s)$ este funcția de transfer a căii directe și $W_r(s)$ este funcția de transfer a căii de reacție. Polii lui $W(s)$ sunt zerourile ecuației caracteristice:

$$1 + W_d(s) \cdot W_r(s) = 0$$

Conform criteriului fundamental de stabilitate, sistemul în buclă închisă este stabil, dacă această ecuație nu are rădăcini cu partea reală pozitivă sau nulă. Cum nu este întotdeauna posibilă aplicarea criteriului Routh, de exemplu când sistemul în buclă deschisă posedă timp mort, se va utiliza criteriul Nyquist, care permite studiarea stabilității sistemului în buclă închisă și prezintă avantajul că nu utilizează decât funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă:

$$W_c(s) = W_d(s) \cdot W_r(s).$$

Enunțul general a **criteriului lui Nyquist** este următorul:

Pentru ca un sistem să fie stabil în buclă închisă, este suficient și necesar ca locul Nyquist al funcției de transfer în buclă deschisă $W_c(s)$, trasat pentru ω crescător (de la $\omega = -\infty$ la $\omega = \infty$), să înconjoare punctul critic de afix -1 , în sens trigonometric, de un număr de N ori egal cu numărul de poli P , cu partea reală pozitivă sau nulă, ai funcției de transfer în buclă deschisă $W_c(s)$.

Pentru a demonstra acest criteriu, se utilizează teorema Cauchy prezentată mai sus. Se consideră transformarea $A(s) = 1 + W_c(s)$. Sistemul în buclă închisă este asimptotic stabil dacă $1 + W_c(s)$ nu are zerouri cu partea reală pozitivă sau nulă.

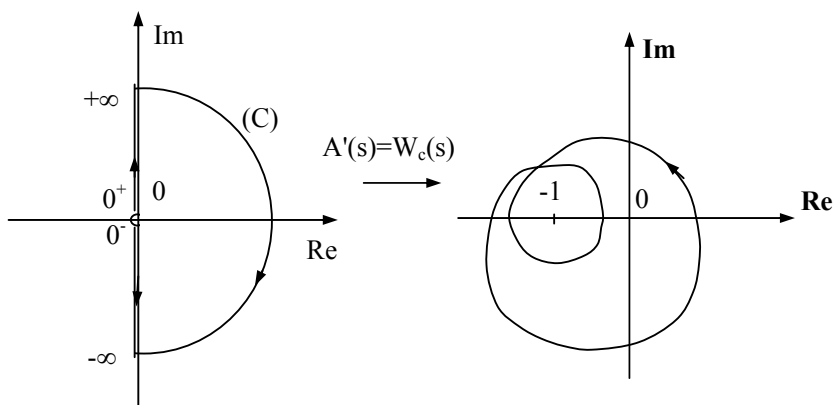


Fig: Conturul (C) și imaginea sa pentru criteriul lui Nyquist

Se consideră conturul (C), numit contur de excluziune și prezentat în figura 8.9, unde punctul 0 este înconjurat de un semi-cerc de centru 0 și rază r infinit mică ($r \rightarrow 0$). Se dorește ca $A(s)=1+W_c(s)$ să nu aibă zerouri în interiorul lui (C) (se vrea așadar $Z=0$).

Imaginea conturului (C), prin aplicația $A(s)$ trebuie, așadar, conform teoremei lui Cauchy, să înconjoare originea în sens trigonometric de un număr de ori egal cu numărul de poli instabili ai ecuației $1+W_c(s)$ (deci ai transmitanței $W_c(s)$). În locul considerării aplicației $A(s)=1+W_c(s)$ și a numărului de ture în jurul originii, se consideră aplicația $A'(s)=W_c(s)$ și numărul de ture în jurul punctului critic -1 .

Studiem transformarea conturului (C) prin aplicația $W_c(s)$:

- imaginea segmentului $(0+, +\infty)$ este $W_c(j\omega)$; aceasta este așadar locul Nyquist al funcției de transfer în buclă deschisă orientat în sensul creșterii lui ω .

- imaginea segmentului $(-\infty, 0-)$ este

$$W_c(-j\omega) = \overline{W_c(j\omega)};$$

aceasta este așadar simetricul în raport cu axa reală a locului Nyquist orientat în sensul creșterii lui ω .

- imaginea semi-cercului cu centrul în origine și rază infinită este redusă la un punct (în general originea) dacă sistemul este fizic realizabil.

- În ceea ce privește imaginea semi-cercului de rază foarte mică se prezintă două cazuri:

• $W_c(s)$ nu conține integrator; atunci $W_c(s)$ tinde spre factorul de amplificare în regim staționar K a sistemului în buclă deschisă, altfel spus un punct fix pe axa reală.

• $W_c(s)$ conține un factor de forma $\frac{K}{s^k}$; se poate atunci scrie

$$s = r \cdot e^{j\theta},$$

cu $r \rightarrow 0$ și θ variind de la $-\frac{\pi}{2}$ la $-\frac{3\pi}{2}$ (fig. urmatoare).

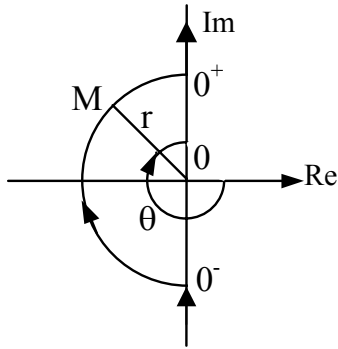


Fig. Reprezentarea semi-cercului care înconjoară originea

În vecinătatea lui $s=0$, avem:

$$W_c(s) \approx \frac{K}{s^k} = \frac{K}{r^k} e^{-jk\theta}.$$

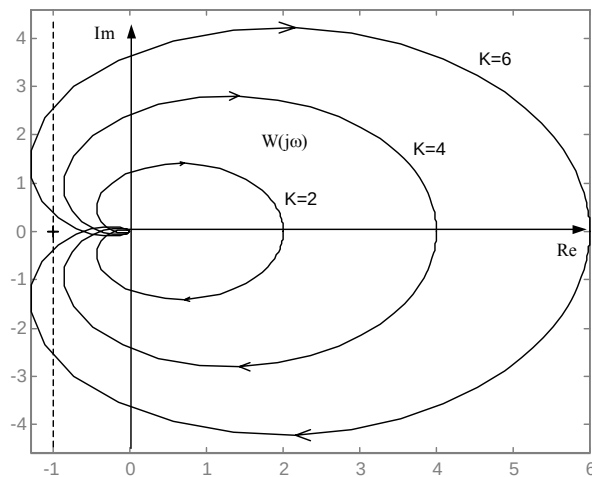
Așadar, $|W_c(s)| \rightarrow \infty$ și $\arg[W_c(s)]$ variază de la $\frac{k\pi}{2}$ la $3\frac{k\pi}{2}$. Astfel $W_c(s)$ descrie k semi-cercuri infinite în sens direct, atunci când se parcurge semi-cercul de la 0^- la 0^+ .

Exemplul 1: Funcția de transfer în buclă deschisă a unui SCLI este

$$W_c(s) = \frac{K}{(1+2s)(1+3s)(1+s)}.$$

Se studiază stabilitatea sistemului în buclă închisă. Mai jos, se prezintă imaginea conturului (C) pentru trei valori ale factorului de amplificare în regim staționar K .

Pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil, locul Nyquist complet nu trebuie să facă nici un tur în jurul punctului critic. Aceasta depinde în mod esențial de valoarea câștigului static K . Apare în mod clar că, pentru conservarea stabilității sistemului în buclă închisă, trebuie limitat la valoarea factorului K .



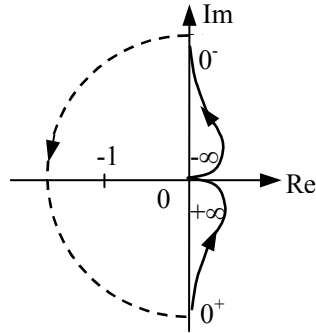
Exemplul 2: Se consideră un SCLI a cărui funcție de transfer în buclă deschisă este:

$$W_c(s) = \frac{K}{s(1 - \tau s)}, \tau > 0,$$

Această transmitanță posedă doi poli cu partea reală pozitivă sau nulă:

$$p_1 = 0 \text{ și } p_2 = 1/\tau.$$

Deci, în buclă deschisă, sistemul este instabil. Pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil, locul Nyquist complet trebuie să facă 2 ture în jurul punctului critic -1 , în sens trigonometric.



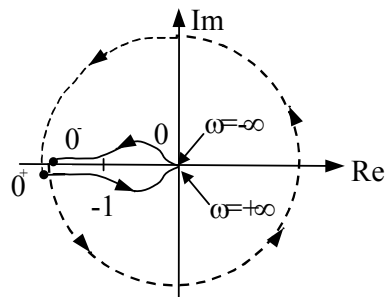
Însă locul lui Nyquist complet, prezentat mai sus, nu face decât un singur tur în sens trigonometric, așadar sistemul în buclă închisă este instabil și aceasta la orice valoarea a amplificării statice K .

Exemplul 3: Fie

$$W_c(s) = \frac{K(1+s)}{s^2(1+0.1s)}$$

funcția de transfer în buclă deschisă a unui SCLI. Ea posedă doi poli în origine și, deci, sistemul în buclă deschisă este instabil.

Constatăm, însă, că locul lui Nyquist complet, prezentat în figura de mai jos, face două ture în jurul punctului critic -1 în sens direct. Așadar, sistemul este stabil în buclă închisă.



Criteriul Nyquist este uneori delicat de aplicat. Pentru sistemele stabile în buclă deschisă, există o **formă simplificată a criteriului lui Nyquist**.

Un sistem stabil în buclă deschisă va fi stabil în buclă închisă, dacă, parcurgând locul Nyquist al funcției de transfer $W_c(j\omega)$ în sensul creșterii pulsației ω de la 0 la ∞ , lăsăm punctul critic (-1) în stânga locului.

Observație: Criteriul simplificat al lui Nyquist este aplicabil sistemelor care posedă unul sau mai multe integratoare în buclă deschisă.

Acest criteriu se deduce simplu din criteriul complet. Nu trebuie ca locul Nyquist complet să înconjoare punctului critic, deoarece numărul de poli instabili ai lui $W_c(j\omega)$ este nul conform ipotezei.

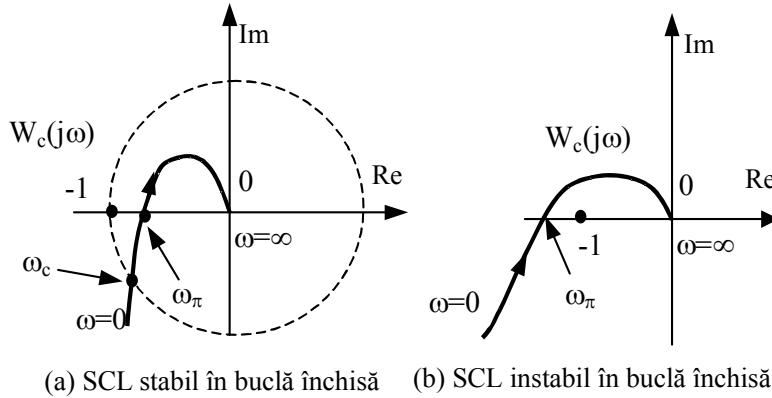


Fig. Criteriul Nyquist simplificat

Figura de mai sus ilustrează criteriul lui Nyquist simplificat. Se evidențiază două pulsații: ω_c , pulsația de tăiere (reamintim că $|W_c(j\omega_c)|=1$) și pulsația ω_π a punctului unde locul de transfer intersectează axa reală. Argumentul lui $W_c(j\omega)$ în acest punct este $-\pi$ (-180°).

Criteriul simplificat al lui Nyquist poate fi exprimat, de asemenea, în planul Bode (fig. 8.12). Punctul critic -1 corespunde în plan Bode lui

$$A_{dB}=0 \text{ și } \varphi^\circ=-180^\circ.$$

Faptul că locul Nyquist al unui sistem stabil în buclă deschisă lasă punctul critic în stânga implică

$$|W_c(j\omega_\pi)| < 1, \text{ pentru } \arg[W_c(j\omega_\pi)] = \varphi(\omega_\pi) = -180^\circ$$

altfel spus

$$A_{dB}(\omega_\pi) < 0,$$

cu condiția ca ω_π să existe (este posibil ca $\varphi(\omega) > -180^\circ$, pentru orice pulsație ω).

Pe de altă parte, pentru pulsația de tăiere care corespunde punctului care se găsește la intersecția locului de transfer Nyquist cu cercul unitar, în cazul unui sistem stabil, avem:

$$\varphi(\omega_c) > -180^\circ,$$

Relațiile anterioare constituie scrieri echivalente ale condiției de stabilitate pentru sistemul în buclă închisă, exprimate cu ajutorul formei simplificate a criteriului lui Nyquist.

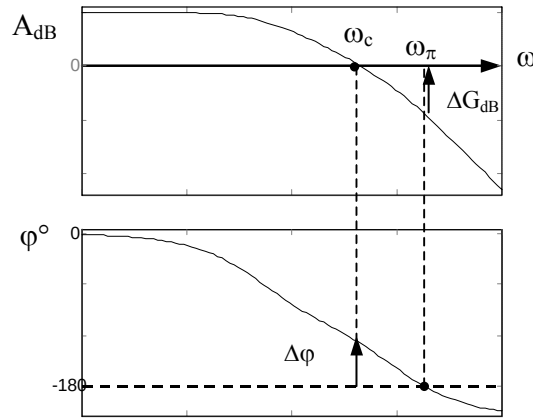


Figura: Criteriul lui Nyquist utilizând caracteristicile lui Bode.

În cazul în care ω_π există, figura de mai sus arată o altă scriere echivalentă a condiției de stabilitate:

$$\omega_c < \omega_\pi.$$

Gradul de stabilitate. Marginea de fază, marginea de amplificare.

Se cunoaște acum modul de studiere a stabilității unui sistem în buclă închisă, dar, în majoritatea cazurilor, un sistem strict stabil nu este satisfăcător. Într-adevăr, dacă locul Nyquist al funcției de transfer în buclă deschisă a unui sistem stabil în buclă închisă este foarte apropiat de punctul critic, răspunsul său va fi foarte slab amortizat, din cauza unui regim tranzitoriu care tinde lent către zero.

Stabilitatea, prin ea însăși, nu este suficientă, ea trebuie să fie completată prin măsurarea gradului de stabilitate. Marginea de fază și marginea de câștig sunt astfel de măsuri ale gradului de stabilitate.

Ele sunt ilustrate prin figura de mai jos. Punctele M și N sunt definite prin intersecția locului Nyquist al lui $W_c(j\omega)$ cu cercul cu centrul în origine și rază unitară respectiv semi-axa reală negativă.

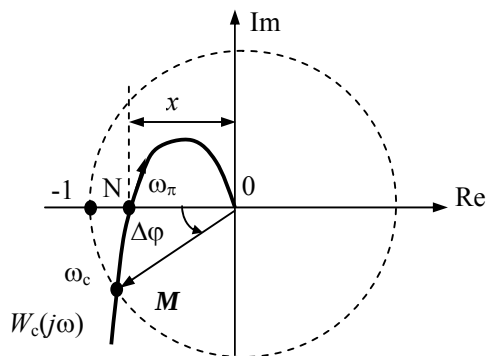


Fig. Marginea de fază și de amplificare

Marginea de fază $\Delta\varphi$ este măsura unghiului orintat $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$:

$$\Delta\varphi = \arg [W_0(j\omega)] + 180^\circ.$$

Ea reprezintă defazajul suplimentar care poate fi “injectat” în sistemul în buclă închisă pentru a-l aduce la instabilitate.

Marginea de amplificare este definită prin:

$$\Delta G = \frac{1}{x}, \text{ unde } x = \|ON\|, \text{ sau, exprimată în decibeli}$$

$$\Delta G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \frac{1}{x}.$$

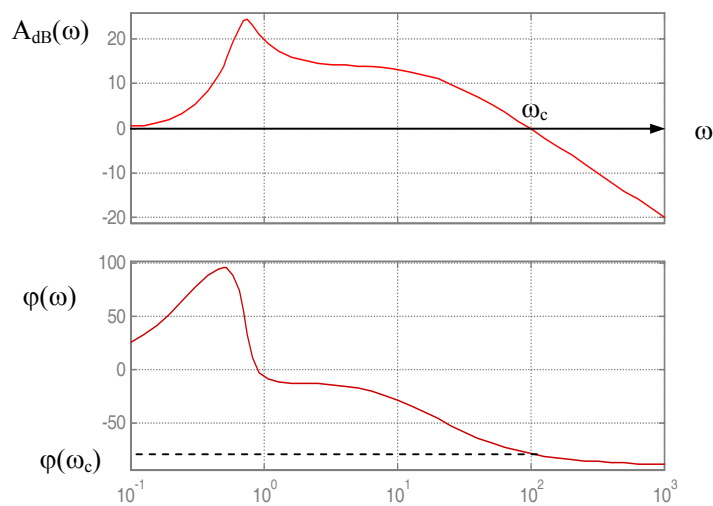
Ea reprezintă amplificarea suplimentară care poate fi introdusă în sistemul în buclă închisă pentru a-l aduce la instabilitate.

Marginile de fază și de amplificare (în decibeli) sunt prezentate în figura de mai sus ca segmente orintate, pentru un SCLI stabil în buclă închisă.

Exemplu: Fie un SCLI în buclă închisă cu funcția de transfer în buclă deschisă

$$W_c(s) = \frac{10s^2 + 5s + 1}{0.1s^3 + 2s^2 + 0.5s + 1}$$

Obținem caracteristicile logaritmice de mai jos.



Se constată ca pulsația de tăiere este

$$\omega_c \approx 100 \text{ rad/s}$$

și că pentru această pulsație defazajul este

$$\varphi(\omega_c) \approx -78^\circ.$$

Marginea de fază este deci:

$$\Delta\varphi = -78^\circ + 180^\circ = 102^\circ$$

Deci sistemul în buclă închisă va fi stabil.

În practică, pentru ca un sistem în buclă închisă să fie bine amortizat, marginea de stabilitate trebuie să aibă valorile superioare anumite valori minimale:

$$\Delta\varphi_{\min} = 45^\circ \text{ la } 50^\circ$$

$$\Delta G_{\min} = 8 \text{ la } 10 \text{ dB.}$$

Cerinte

Studiul notiunilor teoretice prezentate in lucrare. Aplicarea notiunilor teoretice in exemplele prezentate in lucrarea de laborator.

Calculul indicatorilor de stabilitate se va face prin trei metode: calcul analitic, calcul pe caracteristicile de frecventa Bode si calcul utilizand instructiuni Matlab.